

# 一种高频环形磁芯涡流损耗的解析计算方法

邹家勇, 吴为麟, 陈永延

(浙江大学 电气工程学院, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 研究了在电力电子电路中常用的环形磁芯涡流损耗的计算问题, 通过展开环形磁芯, 建立了易于处理的涡流损耗计算模型, 解决了环形磁芯因为结构问题无法建立电磁场方程的困难, 并利用积分变换的方法求解电磁场方程, 得到了以单重级数表示的涡流损耗计算公式。该公式具有计算简单、速度快和不受应用范围限制的优点, 有一定的实用价值, 由于该公式适用于任意频率, 因此, 对研究非正弦激励时磁芯的涡流损耗有重要意义。

**关键词:** 电力电子; 涡流损耗; 环形磁芯; 贝塞尔函数

中图分类号: TM154

文献标识码: A

## Analytical computation of eddy current power loss in toroidal cores

ZOU Jia Yong, WU Wei Lin, CHEN Yong Yan

(Faculty of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract:** Because of the structure of toroidal cores, it is difficult to establish a model for computing of eddy-current power loss. In this paper, by simply choosing to open the actual core, established electromagnetic equation of computing, and solved the equation by means of integral transform, then a new set of eddy current loss formulas were raised. Compared with former formulas, this method is easy, accurate, efficient and not confined for the practical applications. Since it is frequency dependent, the formulas is also valid and significant for toroidal core excited with nonsinusoidal current.

**Key words:** power electronics; eddy-current power loss; toroidal cores; Bessel function

由高阻材料制成的圆环形磁芯在电力电子电路中大量使用<sup>[1-2]</sup>。尽管磁芯导体材料的电阻率较高, 但随着电力电子电路工作频率的提高以及非正弦激励的存在, 磁芯的涡流损耗变得不可忽略, 因此圆环形磁芯中的涡流损耗受到了越来越多的关注<sup>[3-6]</sup>, Fawzi Hussein、Gyimesi 和 Lavers 研究了沿轴向穿过的长直电流在环形磁芯中产生的涡流, 给出了半解析解, 但此种情况实际中比较少见, 结论缺乏通用性。Namjoshi 研究了矩形截面环形磁芯中的涡流损耗, 并给出了解析解, 但该解是基于环形磁芯上绕组密绕, 在不考虑漏磁时得到。而在实际应用中, 为了得到合适的电感参数, 绕组不一定布满磁芯, 而是部分缠绕于铁芯之上, 此时存在漏磁, 以上文献所用的求解方法的边界条件不再成立, 因此, 求解结果不再准确。本文研究了绕有任意多匝线圈的环形磁芯中产生的涡流损耗, 得到了用单重级数表示的计算公式, 该公式计算简单, 易于为工程人员所掌握。

### 1 计算公式的导出

圆环形磁芯如图 1 所示, 先设有单匝线圈绕于其上, 线圈中通以正弦交流电  $i = I \cos \omega t$ , 若其截面为矩形, 则可以利用圆柱坐标系建立其电磁场方程, 但此时由于漏磁场的存在, 边界条件难以确定, 无法求解。对于圆形截面, 却无法找到合适的坐标系建立电磁场方程, 为了避开这一问题, 考虑到对于磁芯一般有  $l \gg R$ , 则不妨将

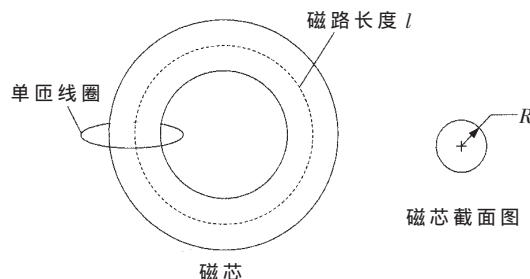


图 1 圆形截面圆环磁芯

磁芯展开成如图 2 所示,考虑到磁路的连续性,在展开的磁芯两端以磁导率为无穷大的介质代替,这样保证了环形磁芯的磁路长度  $l$  不变。在这种情况下,利用镜像法,则电磁场模型可等效为如图 3 所示。

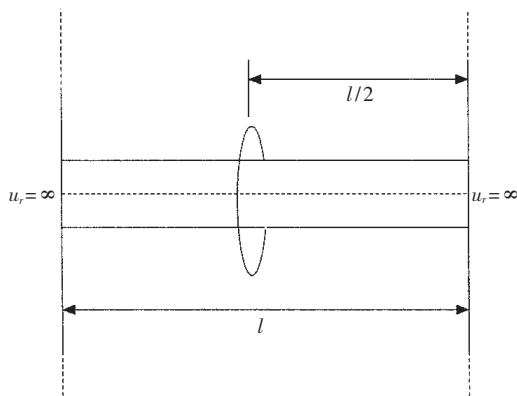


图 2 磁芯展开图

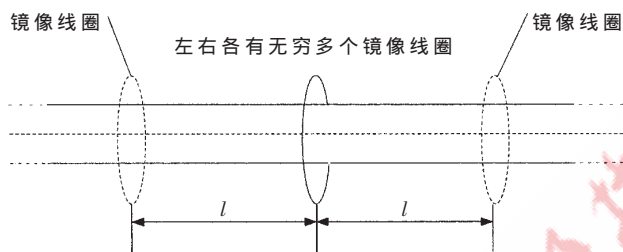


图 3 线圈镜像图

这样,环形磁芯涡流损耗的问题则转化成了求无限长导体上的无穷多个单匝线圈在其某段上产生的涡流损耗的问题。对于无穷多匝线圈所产生的涡流损耗的处理,可以先考虑单匝的情况,然后利用叠加原理求得多匝时的情况,故整个问题被转化为线圈与无限长圆柱导体共轴的涡流问题,如图 4 所示。

对于这类问题相关文献进行过讨论<sup>[7]</sup>,在圆柱坐标系下,考虑其对称性,显然电场强度只有  $\phi$  方向分量,且其值与坐标  $\phi$  无关。设磁芯内外磁场强度和电场强度分别  $E_2, E_1, H_2, H_1$ ,其满足的方程如下<sup>[8]</sup>:

空气中( $r \geq R$ ):

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_1}{\partial r} - \frac{E_1}{r} = j\omega u_0 I \delta(r-a) \delta(z) \quad (1)$$

磁芯中( $r < R$ ):

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_2}{\partial r} - \frac{E_2}{r} = j\omega u_r \sigma E_2 \quad (2)$$

式中,  $u_0$  为空气中的磁导率,  $u_r$  为磁芯的相对磁导率,  $\sigma$  为磁芯的电导率。考虑如下边界条件:

$$E_1 = E_2 \quad H_1 = H_2 \quad (r=R)$$

$$E_1 \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$E_2 = 0 \quad (r=0)$$

$$E_1 \rightarrow 0, E_2 \rightarrow 0, \quad (z \rightarrow \infty)$$

对于以上边值问题的求解,参考文献[8]中提到过

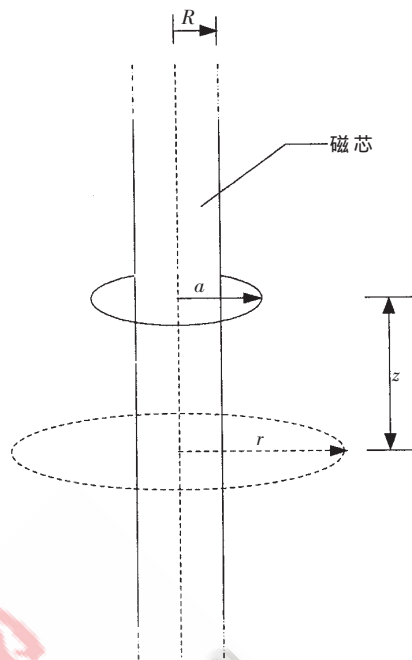


图 4 无限长磁芯上单匝细线圈

一些方法,本文采用积分变换的方法进行求解<sup>[9]</sup>。对式(1)中的变量  $z$  进行积分变换,以  $e^{-j\lambda z}$  为变换因子,设  $E_1^* = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1 e^{-j\lambda z} dz, E_2^* = \int_{-\infty}^{+\infty} E_2 e^{-j\lambda z} dz$ ,则对式(1)、式(2)进行积分变换后可得:

$$\frac{\partial^2 E_1^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_1^*}{\partial r} - \frac{E_1^*}{r} - \lambda^2 E_1^* = j\omega u_0 I \delta(r-a) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 E_2^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_2^*}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} + \lambda^2 + m^2\right) E_2^* = 0 \quad (4)$$

式中,  $m^2 = j\omega u_r \sigma, u_0 \sigma = -2j/\delta^2, \delta$  为透入深度。显然,式(4)为修正的贝塞尔方程<sup>[10]</sup>,其解为:

$$E_2^* = A I_1(\Gamma r) + B K_1(\Gamma r)$$

式中  $I_1, K_1$  为一阶修正的贝塞尔函数,  $A, B$  为由边界条件确定的常数。  $\Gamma = \sqrt{\lambda^2 + m^2}$ , 利用边界条件,  $E_2 = 0 (r=0)$  可得:

$$E_2^* = \frac{I_1(\Gamma r)}{I_1(\Gamma R)} E_R^* \quad (5)$$

式中,  $E_R^*$  为磁芯与空气分界面上( $r=R$ )的电场强度值。式(3)的解可以以载流线圈为分界面,通过分界面的边界条件求得<sup>[7]</sup>:

$$E_1^* = \frac{K_1(\lambda r)}{K_1(\lambda R)} E_R^* + j\omega u_r a \times$$

$$\left\{ \frac{K_1(\lambda r) I_1(\lambda R) K_1(\lambda a)}{K_1(\lambda R)} - I_1(\lambda \min(r, a)) K_1(\lambda \max(r, a)) \right\} I \quad (6)$$

$\min(), \max()$  分别为最小值和最大值函数。

由边界条件  $H_1 = H_2 (r=R)$  可得:

$$\frac{1}{j\omega u_0} \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_1^*)}{\partial r} = \frac{1}{j\omega u_r} \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_2^*)}{\partial r} \quad (r=R) \quad (7)$$

由式(5)、(6)、(7)可得:

$$E_R^* = -j\omega u_0 \times \frac{a\lambda K_1(\lambda a) I_1(\Gamma R) \{I_0(\lambda R) K_1(\lambda R) + I_1(\lambda R) K_0(\lambda R)\}}{\Gamma I_0(\Gamma R) K_1(\lambda R) + \lambda K_0(\lambda R) I_1(\Gamma R)} \quad (8)$$

通过对上述结论作积分反变换可得：

$$E_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1^* e^{j\lambda z} d\lambda \quad (9)$$

若假设在坐标  $(r, z)$  处存在一个单匝细线圈，如图 4 虚线所示，则该线圈上的感应电动势为  $U = -2\pi r E_1$ ，两线圈间的互阻抗为：

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{-2\pi r E_1}{I} = \frac{-2\pi r}{I} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1^* e^{j\lambda z} d\lambda \quad (10)$$

考虑到  $E_1^*$  为关于  $(a, r, \lambda)$  的函数，令  $G(a, r, \lambda) = \frac{-2\pi r}{I} \times \frac{1}{2\pi} \times E_1^*$ ，则上式可写为：

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} G(a, r, \lambda) e^{j\lambda z} d\lambda \quad (11)$$

式(11)为两单匝细绕组之间的互阻抗，现考虑图 3 所示的镜像线圈，并将其对坐标  $(r, z)$  处线圈的作用相叠加，可得环形磁芯上单匝细线圈对坐标  $(r, z)$  处线圈的互阻抗为：

$$Z_m = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(a, r, \lambda) e^{j\lambda(kl+z)} d\lambda \quad (12)$$

根据冲击函数的傅里叶级数展开公式<sup>[9]</sup>，则有：

$$\frac{2\pi}{l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - \frac{2k\pi}{l}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\lambda kl}, \text{ 代入式(12), 可得:}$$

$$Z_m = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(a, r, \lambda) e^{j\lambda(kl+z)} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} G(a, r, \lambda) \frac{2\pi}{l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - \frac{2k\pi}{l}) e^{j\lambda z} d\lambda$$

由  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-c)dx=f(c)$  可得：

$$Z_m = \frac{2\pi}{l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(a, r, \frac{2k\pi}{l}) e^{j\frac{2k\pi}{l}z} \quad (13)$$

又由  $e^{j\frac{2k\pi}{l}z} = \cos(\frac{2k\pi}{l}z) + j\sin(\frac{2k\pi}{l}z)$ ，则式(13)可写为：

$$Z_m = \frac{2\pi}{l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(a, r, \frac{2k\pi}{l}) \cos(\frac{2k\pi}{l}z)$$

令  $\lambda_k = \frac{2k\pi}{l}$ ，将  $G(a, r, \lambda) = \frac{-2\pi r}{I} \times \frac{1}{2\pi} \times E_1^*$  代入式(13)有：

$$Z_m = j\omega u_0 r a \frac{4\pi}{l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_1(\lambda_k \min(r, a)) K_1(\lambda_k \max(r, a)) \cos(\lambda_k z) + \frac{4\pi}{l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{ra K_1(\lambda_k a) K_1(\lambda_k r) I_1(\lambda_k R) F(\lambda_k)}{K_1(\lambda_k R)} \cos(\lambda_k z) \quad (14)$$

式中，函数  $F(\lambda_k)$  定义为：

$$F(\lambda_k) = j\omega u_0 \left\{ \frac{\lambda_k \frac{I_0(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k R)} - \frac{1}{u_r} \Gamma \frac{I_0(\Gamma R)}{I_1(\Gamma R)}}{\lambda_k \frac{K_0(\lambda_k R)}{K_1(\lambda_k R)} - \frac{1}{u_r} \Gamma \frac{I_0(\Gamma R)}{I_1(\Gamma R)}} \right\}$$

令：

$$L_s = u_0 r a \frac{4\pi}{l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_1(\lambda_k \min(r, a)) K_1(\lambda_k \max(r, a)) \cos(\lambda_k z)$$

$$Z_s = \frac{4\pi}{l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{ra K_1(\lambda_k a) K_1(\lambda_k r) I_1(\lambda_k R) F(\lambda_k)}{K_1(\lambda_k R)} \cos(\lambda_k z)$$

则  $Z_m = j\omega L_s + Z_s$ ，在上式中令  $z=0, r=a$ ，可得单匝载流细线缠绕在环形磁芯上的自阻抗，令其为  $Z_{ms}$ ，则有：

$$Z_{ms} = Z_m |_{(z=0, r=a)} \quad (15)$$

涡流损耗的功率为：

$$P = I^2 \text{Re}(Z_{ms}) = I^2 \text{Re}(Z_s) \quad (16)$$

式(16)为电流  $I = I \cos \omega t$  的单匝细线绕组在环形磁芯上所产生的涡流损耗，对于多匝密绕线圈，如图 5 所示，可重复以上步骤先求无限长磁芯上的两单匝绕组之间的互阻抗，然后对绕组横截面积分，再将镜像绕组作用叠加即可。

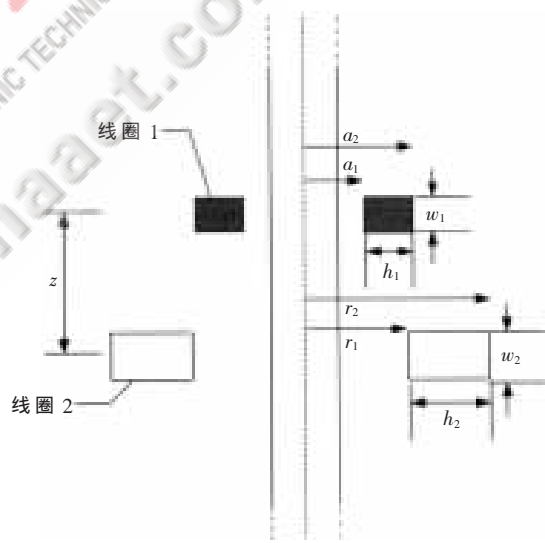


图 5 矩形截面的绕组

具体做法如下：先求无限长磁芯上两线圈之间的互阻抗，由于已经求过单匝线圈之间的互阻抗，只需要对线圈 1 和线圈 2 的截面进行积分即可，设此时的互阻抗为  $Z_{mm}$ ，则有  $\text{Re}(Z_{mm})$  为：

$$\text{Re}(Z_{mm}) = \frac{N_1 N_2}{h_1 w_1 h_2 w_2} \int_0^{+\infty} d\beta \int_{-w_2/2}^{w_2/2} dz_2 \int_{-w_1/2}^{w_1/2} dz_1 \int_{r_1}^{r_2} dr \times \int_{a_1}^{a_2} \frac{ra K_1(\lambda a) K_1(\lambda r) I_1(\lambda R)}{K_1(\lambda R)} \times F(\lambda) \cos[\lambda(z+z_2-z_1)] da$$

由参考文献[11]，对上式进行数学处理有：

$$\text{Re}(Z_{mm}) = \text{Re} \left( \frac{2N_1 N_2}{h_1 w_1 h_2 w_2} \int_0^{+\infty} P_1(\lambda a_2, \lambda a_1) P_1(\lambda r_2, \lambda r_1) \times Q_1(\lambda w_2, \lambda w_1) \frac{I_1(\lambda R)}{K_1(\lambda R)} F(\lambda) \cos(\lambda z) d\lambda \right)$$

其中:函数  $P_1(x, y), Q_1(x, y)$  定义如下:

$$P_1(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda^2} [p_1(\lambda x) - p_1(\lambda y)]$$

$$Q_1(\lambda x, \lambda y) = \frac{2}{\lambda^2} [\cos(\frac{\lambda(x-y)}{2}) - \cos(\frac{\lambda(x+y)}{2})]$$

$$p_1(x) = \frac{\pi x}{2} [K_1(x)L_0(x) - L_1(x)K_0(x)]$$

式中,  $L_0(x), L_1(x)$  分别为零阶和一阶的修正斯图鲁弗函数。考虑镜像线圈, 重复式(10)~式(13)的过程, 并进行适当的数学处理, 可得圆形截面环形磁芯上两绕组之间互阻抗的实部为  $\text{Re}(Z_{mm})$ :

$$\text{Re}(Z_{mm}) = \text{Re}(\frac{4\pi}{l} \frac{N_1 N_2}{h_1 w_1 h_2 w_2} \sum_0^{+\infty} P_1(\lambda_k a_2, \lambda_k a_1) P_1(\lambda_k r_2, \lambda_k r_1)) \times Q_1(\lambda_k w_2, \lambda_k w_1) \frac{I_1(\lambda_k R)}{K_1(\lambda_k R)} F(\lambda_k) \cos(\lambda_k z)) \quad (17)$$

在上式中, 令  $z=0, N_1=N_2, w_1=w_2, h_1=h_2$ , 则两绕组重合, 上式可简化为:

$$\text{Re}(Z_{mm}) = \text{Re}(\frac{4\pi}{l} \frac{N^2}{h^2 w^2} \sum_0^{+\infty} (P_1(\lambda_k a_2, \lambda_k a_1))^2 \times Q_1(\lambda_k w, \lambda_k w) \frac{I_1(\lambda_k R)}{K_1(\lambda_k R)} F(\lambda_k)) \quad (18)$$

式中,  $N$  为绕组匝数,  $h$  为绕组截面径向高度,  $w$  为绕组截面轴向高度,  $\lambda_k = \frac{2k\pi}{l}$ , 则环形磁芯尺寸、绕组截面尺寸和匝数已知时, 其涡流损耗为:

$$P = I^2 \text{Re}(Z_{mm}) \quad (19)$$

当为螺线管电感时, 此时令绕组截面轴向高度等于磁路长度, 即  $w=l$ , 则可得到其磁芯涡流损耗功率。

## 2 算例

现选 Micrometals T400-26 环形铁粉磁芯, 绕组和铁心参数如下:

磁路长度: 250 mm

磁芯半径: 10.8 mm

绕组匝数: 25

绕组尺寸:  $w=10$  mm,  $h=10$  mm,  $r_1=10.8$  mm,  $r_2=20.8$  mm

相对磁导率: 75

磁芯电导率: 100

采用日本 NF 公司的功率放大器 4520 产生不同频率的正弦信号, 利用该仪器的恒流源模式, 使绕组电流恒定为  $i = \cos\omega t A$ , 测量其在不同频率下的涡流损耗, 考虑到低频时磁芯涡流损耗不明显, 计算其在 1 kHz~100 kHz 时的涡流损耗, 并按公式(19)用数学软件 MAPLE 对其进行计算, 试验与计算所得结果比较如图 6 所示。

由图 6 可以看出, 计算值与实际值能够较好地匹配, 随着频率的升高, 磁芯涡流损耗急剧上升, 发热严重, 因此, 在磁性元件的设计和使用时应充分考虑这方面的问题。

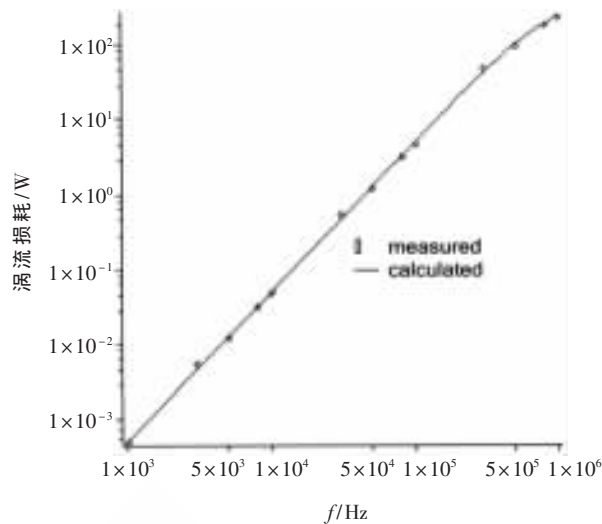


图 6 计算值与试验值的比较

本文通过将环形磁芯展开使用镜像法得到了磁芯的涡流损耗解析计算公式, 该公式编程计算简单, 计算精度较高, 具有广泛的通用性, 给实际问题的分析和处理带来了很大的方便, 具有一定的使用价值。由于文中给出的公式不受频率限制, 因此对非正弦电流激励时的磁芯涡流损耗有重要意义。

## 参考文献

- [1] BELOVE C. Handbook of modern electronics and electrical engineering[M]. New York: Wiley, 1986: 159-160, 248.
- [2] 王兆安, 张明勋. 电力电子设备设计及应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2002: 702-745.
- [3] GYIMESI M, LAVERS J D. Magnetic field around an iron torus[J]. IEEE Trans on Magnetics, 1992, 28(5): 2799-2801.
- [4] FAWZI T H, HUSSEIN A M. Analytical solution of transverse electric eddy-current problems with rotational symmetry[J]. IEEE Trans on Magnetics, 1995, 31(3): 1396-1399.
- [5] NAMJOSHI K V, LAVERS J D, BIRINGER P P. Eddy current power loss in toroidal cores with rectangular cross section[J]. IEEE Trans. Magn, 1998, 34(3): 636-641.
- [6] 应柏青. 高频电子电路用圆环形磁芯中涡流损耗的有限元计算[J]. 微电子学与计算机, 2002(4): 51-53.
- [7] 雷银照. 时谐电磁场解析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2000: 178-215.
- [8] 倪光正. 工程电磁场原理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [9] 罗纳德. N. 布雷斯韦尔. 傅立叶变换及其应用[M]. 殷勤业译. 西安: 西安交通大学出版社, 2005.
- [10] 王竹溪. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
- [11] LUKE Y L. Integrals of Bessel functions[M]. McGraw-Hill Book, Co Inc. 1962.

(收稿日期: 2008-11-10)